

A KOMBINATORIKA NYOMÁBAN

Indulhat az időutazás!

Képzeld el, hogy egy különleges küldetésre indulsz!

Egy titkos történelmi társaság tagjaként azt a feladatot kaptad, hogy felderítsd, hogyan tanult meg az emberiség rendet teremteni a sokféle lehetőség között.

Utazásod során ellátogatsz Arkhimédész szürakuszai műhelyébe, ahol a Stomachion darabjait rendezed. Később Al-Kindi kódfeltörő műhelyében vizsgálod a lehetséges jelsorokat.

Minden feladat egy újabb nyom.

Ha mindet megfejted, megszerezheted a  **A Kombinatorika Történelmi Nyomozója** jelvényt.



Történelmi nyomozó feladatok

1. Három darab Arkhimédész asztalán

Arkhimédész három különböző Stomachion-darabot tesz eléd: **Háromszög (H), Trapéz (T), Ötszög (Ö).**

Rakd sorba őket minden lehetséges módon! Írd le az összes különböző sorrendet.

matekmogott.hu

Nyom: haladj rendszeresen aszerint, melyik alakzat áll az első helyen!

2. Egy új darab érkezik

A mester most **négy különböző darabot** tesz eléd: Háromszög (H), Trapéz (T), Ötszög (Ö), Deltoid (D).

Hány különböző sorrend készíthető, ha mind a négy darabot felhasználod?

Válasz: _____

Nyom: hány lehetőség van az első, a második, a harmadik, majd a negyedik helyre?

3. Ki járt itt?

Párosítsd!

- Arkhimédész
- Al-Kindi
- François Viète

↓

- a Stomachion lehetséges elrendezéseivel foglalkozott
- a betűk gyakoriságát használta titkosírások megfejtésére
- a spanyolok titkosírással írt leveleit fejtette meg

4. A Nagy Háromszög vezet

Négy különböző darab áll sorban: Kis Háromszög (K), Nagy Háromszög (N), Trapéz (T), Ötszög (Ö).

A Nagy Háromszögnek **mindig az első helyen** kell állnia.

Hány különböző sorrend készíthető?

Válasz: _____

5. Az Ötszög a sor szélén

A négy különböző darab: Kis Háromszög (K), Nagy Háromszög (N), Trapéz (T), Ötszög (Ö).

Az Ötszög csak a sor **első vagy utolsó helyére** kerülhet.

Hány különböző sorrend felel meg a feltételnek?

Válasz: _____

6. Al-Kindi titkos jelsora

Al-Kindi négy különböző jelet vizsgál: $\triangle$, $\circ$, $\square$, $\star$.

Három jelből álló jelsort kell készítenie úgy, hogy egy jelet egy jelsorban **csak egyszer** használhat.

Hány különböző jelsor készíthető?

Válasz: _____

7. Nyomozás a kombinatorika után

Melyik két állítás igaz?

- A) Három különböző tárgyat 6 különböző sorrendben lehet elhelyezni.
- B) Ha két egyforma tárgy helyet cserél, mindig új sorrendet kapunk.
- C) Négy különböző jelből 24 különböző háromjelű jelsor készíthető, ha egy jel nem ismétlődhet.



Rövid megoldások a Történelmi nyomozó feladatokhoz

1.

Megoldás:

A hat sorrend: H-T-Ö, H-Ö-T, T-H-Ö, T-Ö-H, Ö-H-T, Ö-T-H.

Válasz: **6 különböző sorrend** készíthető.

2.

Megoldás:

Az első helyre 4, a másodikra 3, a harmadikra 2, az utolsóra 1 darab kerülhet.

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Válasz: **24 különböző sorrend** készíthető.

3.

Megoldás:

- Arkhimédész → a Stomachion lehetséges elrendezéseivel foglalkozott
- Al-Kindi → a betűk gyakoriságát használta titkosírások megfejtésére
- François Viète → a spanyolok titkosírással írt leveleit fejtette meg

4.

Megoldás:

A Nagy Háromszög helye rögzített. A másik három különböző darabot kell sorba rendezni.

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

Válasz: **6 különböző sorrend** készíthető.

5.

Megoldás:

1. eset: az Ötszög az első helyen áll. A másik három darab 6 sorrendben követheti.

2. eset: az Ötszög az utolsó helyen áll. A másik három darab ismét 6 sorrendben előzheti meg.

$$6 + 6 = 12$$

Válasz: **12 megfelelő sorrend** van.

6.

Megoldás:

Az első jelre 4 lehetőség van. A másodikra már csak 3, a harmadikra 2.

$$4 \times 3 \times 2 = 24$$

Válasz: **24 különböző háromjelű jelsor** készíthető.

7.

Megoldás:

A és C igaz.

 További kutatós feladatok

8. Stomachion-nyomozás

Hány darabból áll Arkhimédész által kitalált Stomachion?

 Válasz: _____

9. Al-Kindi kódfeltörő műhelye

Mit számolt meg Al-Kindi a titkos szövegben a gyakoriságelemzés során, és miért segített ez a kód megfejtésében?

 Válasz: _____

10. Turing és a lehetőségek szűkítése

Miért csökkentette jelentősen a kipróbálandó Enigma-beállítások számát egy előre sejtethető szövegrész, az úgynevezett „crib”?

 Válasz: _____

 Extra küldetés

Írj három hétköznapi helyzetet, amelyből kombinatorikai kérdést lehet készíteni!

- _____
- _____
- _____

 Gratulálunk!

Megszerezted a Kombinatorika Történelmi Nyomozója jelvényt!

 **Bronz nyomozó** – 5 helyes válasz

 **Ezüst nyomozó** – 6 helyes válasz

 **Arany nyomozó** – mind a 7 történelmi nyomozós feladatot hibátlanul megoldottad

 **A lehetőségek mestere** – a kutatós feladatokat is megoldottad



 **Még egy küldetés**

Te lettél Arkhimédész műhelyének fő rendszerezője.

A végső kihívás:

Öt különböző darabot kell sorba rendezned: Kis Háromszög (K), Nagy Háromszög (N), Trapéz (T), Ötszög (Ö), Deltoid (D).

Az Ötszög csak a sor egyik szélén állhat, és a Trapéz nem állhat közvetlenül a Kis Háromszög mellett.

Hány különböző sorrend felel meg mindkét feltételnek?

Mutasd meg, hogyan bontottad esetekre a lehetőségeket!

Ha megtaláltad a választ, már igazi történelmi nyomozóvá váltál!

Ha kíváncsi vagy a történet végére, gyere, kutass tovább!

A matematika története még rengeteg titkot rejt. Találkozunk a következő kalandban!

A „Még egy küldetés” megoldása

A végső kihívás

Öt különböző darabot kell sorba rendeznünk: Kis Háromszög (K), Nagy Háromszög (N), Trapéz (T), Ötszög (Ö), Deltoid (D).

Az **Ötszög csak a sor egyik szélén** állhat, és a **Trapéz nem állhat közvetlenül a Kis Háromszög mellett**.

Hány különböző sorrend felel meg mindkét feltételnek?

1. lépés – Bontsuk két esetre a feladatot!

Az Ötszög csak a sor két szélén állhat, ezért két nagy esetünk van:

1. eset: $\text{Ö} \mid _ \mid _ \mid _ \mid _$

2. eset: $_ \mid _ \mid _ \mid _ \mid \text{Ö}$

A két eset teljesen szimmetrikus: ugyanannyi megfelelő sorrendet kapunk, akár az első, akár az utolsó helyen áll az Ötszög.

2. lépés – Hány sorrend lenne a második feltétel nélkül?

Rögzítsük először az Ötszöget az első helyen. A négy megmaradt különböző darabot kell sorba rendeznünk:

K, N, T, D

Az első szabad helyre 4, a következőre 3, majd 2, végül 1 darab kerülhet.

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Tehát **24 sorrend** lenne, ha a Trapéz és a Kis Háromszög bárhol állhatna.

3. lépés – Számoljuk meg a tiltott sorrendeket!

Most azokat a sorrendeket kell megszámlálnunk, amelyekben a Trapéz és a Kis Háromszög közvetlenül egymás mellett áll. Ezeket majd kivonjuk az összes lehetőségéből.

Tekintsük a két egymás melletti darabot egyetlen blokknak. A blokkon belül kétféle sorrend lehetséges:

[K-T] vagy [T-K]

A blokk mellett még a Nagy Háromszög (N) és a Deltoid (D) marad.

Így három „egységet” kell sorba rendeznünk:

[K-T], N, D

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

Mivel a blokkon belül kétféle sorrend lehet, a tiltott sorrendek száma:

$$6 \times 2 = 12$$

4. lépés – Vonjuk ki a tiltott eseteket!

Az Ötszög első helyénél összesen **24 sorrend** volt. Ezek közül **12-ben** áll egymás mellett K és T.

$$24 - 12 = 12$$

Tehát **12 megfelelő sorrend** van, ha az Ötszög az első helyen áll.

5. lépés – Vizsgáljuk meg a másik szélt!

Ha az Ötszög az utolsó helyen áll, ugyanilyen módon számolhatunk. A négy megmaradt darab sorrendjeire ugyanaz a feltétel vonatkozik.

$$24 - 12 = 12$$

Ebben az esetben is **12 megfelelő sorrendet** kapunk.

6. lépés – Adjuk össze a két esetet!

Az Ötszög lehet az első vagy az utolsó helyen. A két eset nem fedi egymást, ezért a kapott lehetőségeket összeadhatjuk.

$$12 + 12 = 24$$

☒ **Válasz**

Összesen 24 különböző sorrend felel meg mindkét feltételnek, tehát a válasz:

24 megfelelő sorrend

💡 Mit tanultunk ebből?

Ebben a feladatban egyszerűbb volt először megszámolni az összes lehetőséget, majd kivonni közülük a tiltott eseteket, mint egyenként felsorolni az összes jó sorrendet.

összes eset – tiltott esetek = megfelelő esetek

Ez a gondolkodási stratégia sok összetettebb kombinatorikai feladatnál is hasznos.